束のフリップについて (Flip of lattices)

[arXiv:2605.09601]

永野 寛

東京科学大学

2026/06/03

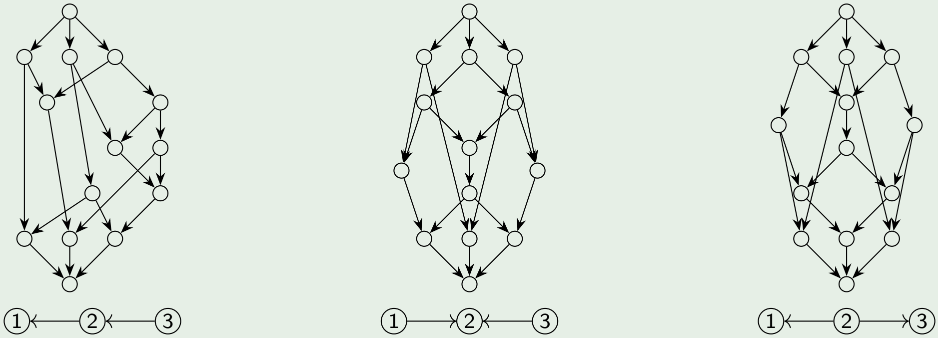
南大阪代数セミナー

目次

目次

[Reading '06] は 2000 年代初頭に現れた団代数論の視点から，有限型コクセター箙に対応する束構造として，カンブリア束を導入した．

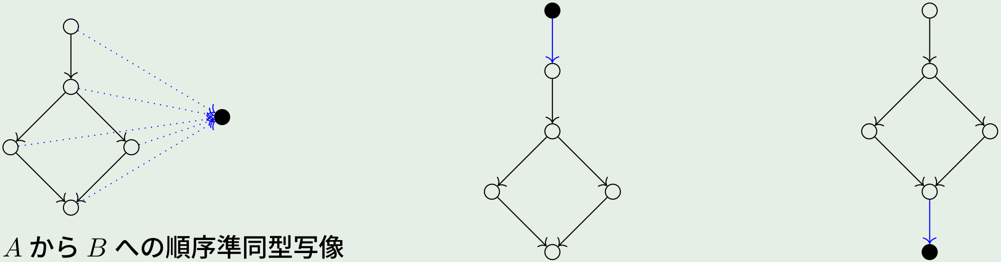
例：カンブリア束と対応する有限型コクセター箙



どれも無向化グラフは A_3 連想多面体となり，A_3 型団パターンの変異グラフと同型．

[Ladkani '07] は箙の表現論を用いて Flip-Flop と呼ばれる操作を導入した．更に，2 つのカンブリア束 Camb$(\overrightarrow{B})$ と Camb$(\mu_i(\overrightarrow{B}))$ は，$i \in \overrightarrow{B}$ がシンク/ソースのとき Flip-Flop で写り合うことを示した．

例：Flip-Flop



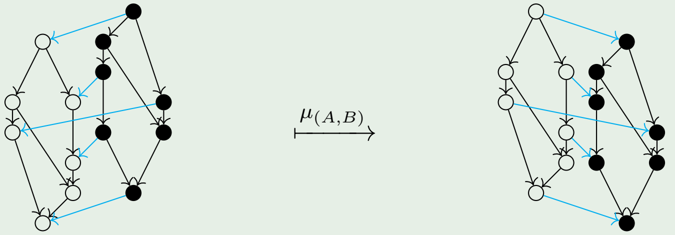
A から B への順序準同型写像 f

半順序集合 $(A \sqcup B, \leq_+^f)$

半順序集合 $(A \sqcup B, \leq_-^f)$

本講演では新たにフリップ (*flip*) と呼ばれる組合せ論的操作を導入する．フリップを用いて束同士の関連性を調べ，特にオルドビス束 (*Ordovician lattices*) を定義する．

例：フリップ



目次

束

半順序集合 $(L, \leq_L)$ が束であるとは，任意の 2 元 $x, y \in L$ に対しその上限 $x \vee y$ と下限 $x \wedge y$ が存在すること．ここで $x \vee y$ は x 以上かつ y 以上である元の中で最小のもの，$x \wedge y$ は x 以下かつ y 以下である元の中で最大のものとする．

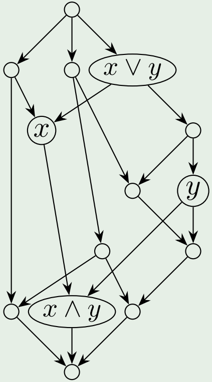
カバー

$x \prec_L y \ \Leftrightarrow\ (x < y,$ and $x \leq z \leq y \ \Leftrightarrow\ z \in \{x, y\})$ と定める．更にこのとき，x を y がカバーすると呼ぶ．

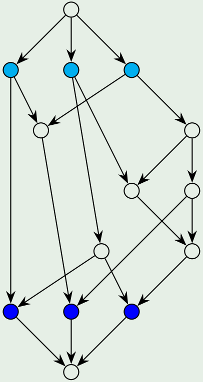
原子元・余原子元

最小元 0 をカバーする元 a を原子元と呼ぶ．同様に，最大元 1 にカバーされる元 a' を余原子元と呼ぶ．

例：束と原子元・余原子元



上限 $x \vee y$・下限 $x \wedge y$



原子元 (青)・余原子元 (水)

定義 [N '26]: フリップ (flip)

$(L, \leq_L)$ を有限半順序集合，$\emptyset \neq A, B \subset L$ を以下を満たす部分集合とする：

$$L = A \cup B\ ,\ \emptyset = A \cap B,\ \text{and}\ \forall x \in A, \forall y \in B\quad x \not\geq y.$$

このとき，半順序集合 $(L', \leq_{L'})$ を，集合として $L' = L$ ，順序は以下の通り定める：

$$x \leq_{L'} y \iff \exists x_0, x_1, \cdots x_n\ \text{s.t.}\ x_0 = x\ ,\ x_n = y\ ,\ x_0 \prec_{L'} x_1 \prec_{L'} \cdots \prec_{L'} x_n.$$

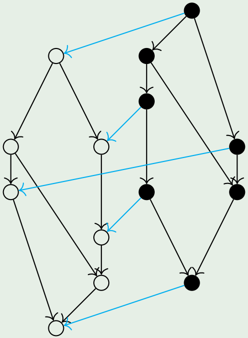
$\prec_{L'}$ は以下の通り定める．ここで，$x \prec_L y \iff (x < y,\ \text{and}\ x \leq z \leq y \iff z \in \{x, y\})$．

$$x \prec_{L'} y \iff (x, y \in A\ \&\ x \prec_L y)\ \text{or}\ (x, y \in B\ \&\ x \prec_L y)\ \text{or}\ (x \in B, y \in A\ \&\ y \prec_L x)$$

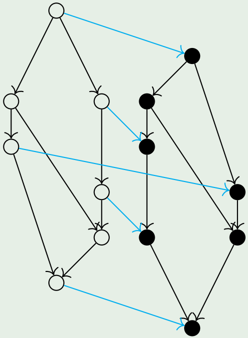
$(L', \leq_{L'})$ を $(L, \leq_L)$ のフリップ対 (A, B) によるフリップ *(flip)* と呼び，$\mu_{(A,B)}(L, \leq_L)$ で表す．

簡単に言えば，L' は L から A と B の間に掛かる全てのカバーの向きを逆にして得られる．
このとき，L によって L' にもラベルが誘導される．

例：フリップ



$$\xmapsto{\mu_{(A,B)}}$$



フリップ前　　フリップ後

変異 (mutation)

断層面 (fault plane)

(A, B) を L のフリップ対とする．∂A を，A の中で B の元にカバーされる元全体の集合とする．∂B も同様に定める (B の元の中で A の元をカバーする元全体の集合)．

定義 [N '26]

$\mu_{(A,B)} : L \mapsto L'$ を束 L のフリップとする．このときいくつかの用語を定める：

1. フリップ $L \mapsto L'$ が変異 *(mutation)* であるとは，L, L' が共に束であること．つまり，任意の $x, y \in L'$ に対し，その上限 $x \vee_{L'} y$ と下限 $x \wedge_{L'} y$ が取れる．
2. フリップ $L \mapsto L'$ が *AC* 条件 *(AC condition)* を満たすとは，A がある余原子元 $a' \prec 1$ を，B がある原子元 $a \succ 0$ を含むこと．
3. フリップ $L \mapsto L'$ が ∂-部分束条件 *(∂-sublattice condition)* を満たすとは，∂A が $\vee$ で，∂B が $\wedge$ で閉じること．

例：断層面

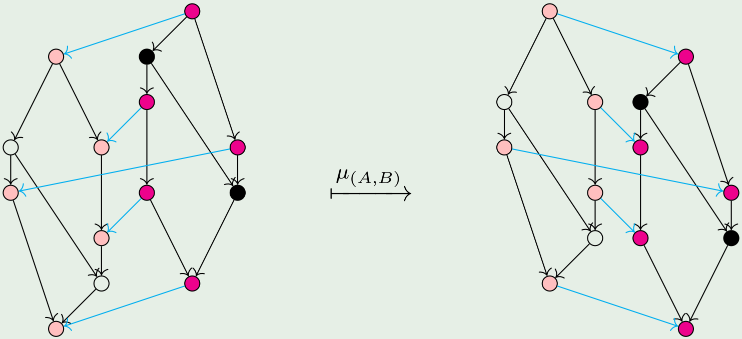


Figure: 断層面 ∂A, ∂B

定理 [N '26]

$\mu_{(A,B)} : L \mapsto L'$ を束 L のフリップとする．以下は同値：

1. $\mu_{(A,B)}$ は変異．
2. $\mu_{(A,B)}$ は AC 条件，∂-部分束条件を共に満たす．

$\mu_{(A,B)}$ を変異とする．このとき A，B，∂A，∂B は全て L の部分束．更に，∂A と ∂B とは束同型．

AC 対応

$\mu_{(A,B)}$ が変異のとき，$A = \{x \leq a' \mid x \in L\}$, $B = \{x \geq a \mid x \in L\}$ と表せる． ここで，a, a' は AC 条件を満たすように取る．この変異を μ_a や $\mu_{a'}$ で表す．

例：変異と AC 対応

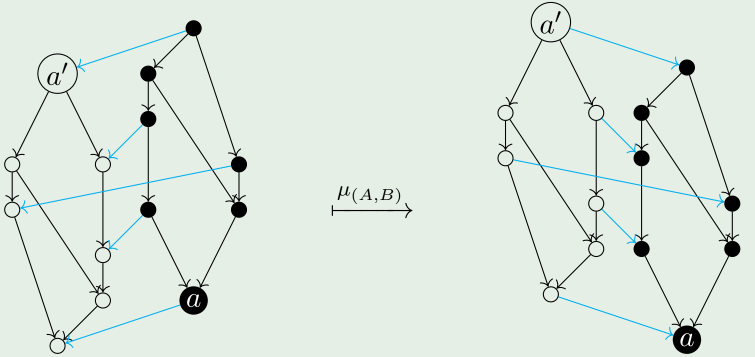


Figure: 変異における AC 対応 (左図)． $A = \{x \leq a' \mid x \in L\}$， $B = \{x \geq a \mid x \in L\}$ が成立．

変異可能束

定義 [N '26]: 局所変異可能束 (locally mutable lattice)

束 L が局所変異可能束 *(locally mutable lattice)* とは，任意の原子元 $a \in L$ および余原子元 $a' \in L$ に対して対応する変異 μ_a (resp. $\mu_{a'}$) が存在すること．

定義 [N '26]: 変異可能束 (mutable lattice)

束 L が変異可能束 *(mutable lattice)* とは，何回どのように変異しても局所変異可能束であること．

変異の命名

変異という名称は団代数論の変異との対応を予想して名付けられている．

変異可能束の例

例 [N ’26] (cf. [Reading ’06])

以下は変異可能束である：

1. ポリゴン束 (ハッセ図が 1 つの N 角形を成す束)
2. ブール束 $\{0,1\}^n$，ここで $\{0,1\}$ は 2 元からなる鎖，n は非負整数
3. 有限コクセター群の (右) 弱順序
4. A_3 タマリ束
5. B_3 タマリ束

変異可能束の性質

定理 [N '26]

変異可能束は Semidistributive である．つまり，以下の性質を持つ：

$$x \vee y = x \vee z = w \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = x \vee y,$$

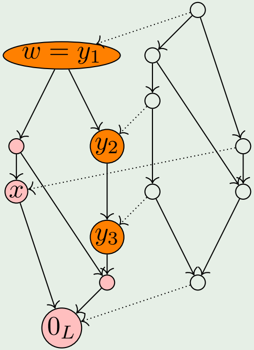
$$x \wedge y = x \wedge z = w \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = x \wedge y.$$

Semidistributive 束の代表例としてカンブリア束が挙げられる [Demonet–Iyama–Reading–Reiten–Thomas '23]．[Reading–Speyer–Thomas '21] によって Semidistributive 束の特徴付けが成されている．

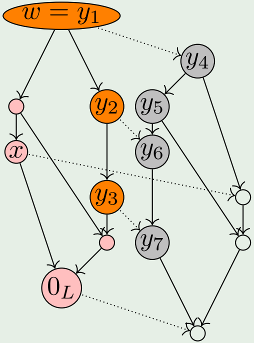
逆は不成立 [N '26]

Semidistributive 束は変異可能束とは限らない (反例が存在)．

例：変異可能束の Semidistributive 性



$\xrightarrow{\mu_{(A,B)}}$



$x \vee y = w \Leftrightarrow y \in \{y_1, y_2, y_3\}$
$\{y_1, y_2, y_3\}$ は $\wedge$ で閉じる

$x \vee y = w \Leftrightarrow y \in \{y_1, y_2, \cdots, y_7\}$
$\{y_1, y_2, \cdots, y_7\}$ は $\wedge$ で閉じる

目次

半順序集合 L が連結とは，そのハッセ図の無向化グラフが連結であること．

$x, y \in L$ を連結な半順序集合の 2 元とする．$d_L(x,y)$ を以下の通り定める：

$$\min \left\{ n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{列 } (x = x_0, \cdots, x_m = y) \text{ であって，} \\ \text{ちょうど } n \text{ 個の } i \text{ で } x_i \succ x_{i+1} \text{を満たし，} \\ \text{残りは } x_i \prec x_{i+1} \text{を満たすものが存在する} \end{array} \right\}$$

$x, y \in L$ を連結な半順序集合の 2 元とする．以下が成立：

$$d_L(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \leq_L y$$

$\mu_{(A,B)} : L \mapsto L'$ を連結な半順序集合 L のフリップとする．以下が成立：

$$d_{L'}(x,y) - d_L(x,y) = \begin{cases} +1 \text{ if } x \in A, y \in B \\ -1 \text{ if } x \in B, y \in A \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

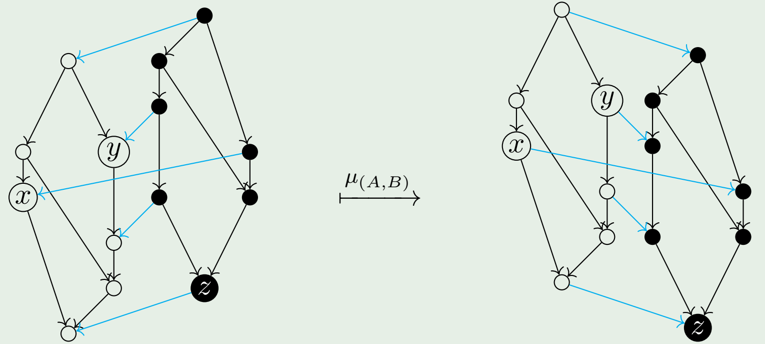
不変量 D

$x, y, z \in L$ を連結な半順序集合の 3 つの元とする．以下の通り D_L を定める：

$$D_L(x,y,z) = d_L(x,y) + d_L(y,z) - d_L(x,z).$$

この値は常に非負整数．更に任意のフリップ $L \mapsto L'$ に対し $D_{L'}(x,y,z) = D_L(x,y,z)$.

不変量 D



d(x,y)=1, d(y,z)=2, d(x,z)=1
D(x,y,z)=1+2-1=2

d(x,y)=1, d(y,z)=3, d(x,z)=2
D(x,y,z)=1+3-2=2

不変量 D の応用

L を最小元 0_L を持つ半順序集合とするとき，$D_L(0_L, y, z) = d(y, z)$．特に，D_L は L の半順序構造を復元する．

定理 [N '26]

$x \in L$ を連結な半順序集合の元とする．このとき，ある半順序集合 L' が一意に存在し，それは L から有限回のフリップで得られ，更に x を最小元に持つ．

定理 [N '26]

2 つの連結な半順序集合 $L_1 = (L, \leq_{L_1}), L_2 = (L, \leq_{L_2})$ に対し，以下は同値：

1. L_2 は L_1 から有限回のフリップで得られる．
2. 任意の $x, y, z \in L$ に対して $D_{L_1}(x, y, z) = D_{L_2}(x, y, z)$ が成立．

目次

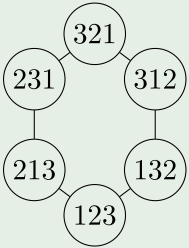
定義：転倒集合

$\sigma \in S_n$ に対し，$\mathsf{Inv}(\sigma) = \{(i,j) \mid i \lneq j, \sigma(i) \gneq \sigma(j)\}$

定義：対称群上の右弱順序

$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ に対し，$\sigma_1 \leq \sigma_2 \Leftrightarrow \mathsf{Inv}(\sigma_1) \subset \mathsf{Inv}(\sigma_2)$

例：S_3 における右弱順序

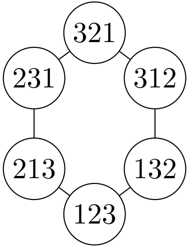


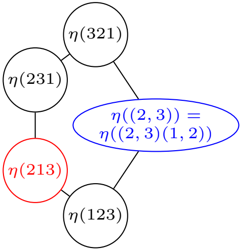
カンブリア束

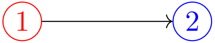
定義 [Reading '06]：カンブリア束 (Cambrian lattice)

箙 Q はその無向化グラフが ① $-$ ② $- \cdots -$ ⓝ であるとする．Camb(Q) は，S_{n+1} の右弱順序を全射な束準同型写像 η の核で割った商束として定める．ここで，η は以下を満たす中で最も細かい写像として定める：

$$i \to j \text{ に対し，} \eta((j, j+1)) = \eta((j, j+1)(i, i+1))$$



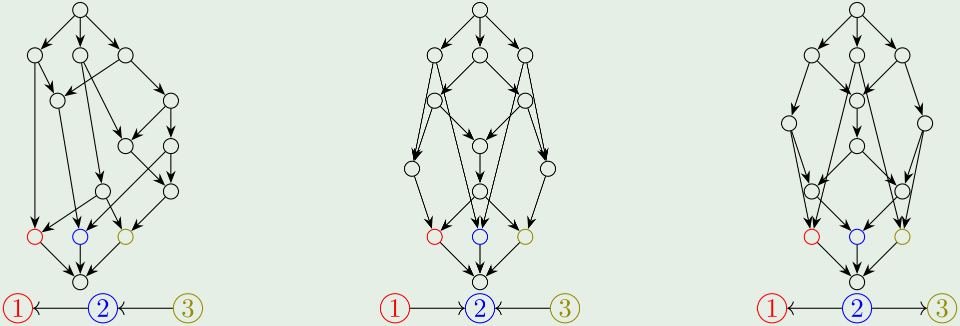




箙 Q

例：カンブリア束

以下に A_3 型 $(=S_4$ から得られる$)$ カンブリア束を列挙する：



ここで，箙の頂点 i と同じ色の原子元は $\eta(i, i+1)$ を表す．

カンブリア束のフリップ

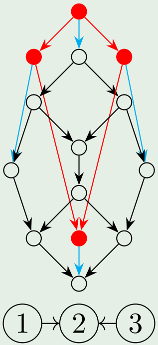
定理 [N '26]

以下が成立：

1. L をカンブリア束とする．このとき L は局所変異可能束である．
2. Q を A 型コクセター箙，$i \in Q$ をシンク/ソースとする． このとき $\mu_{\eta(i,i+1)}\mathsf{Camb}(Q) \cong \mathsf{Camb}(\mu_i(Q))$ が成立．ここで，μ_i は箙の変異．
3. Q, Q' を A_n 型コクセター箙とする． このときある L' が存在し，$L' \cong \mathsf{Camb}(Q')$ かつ $\mathsf{Camb}(Q)$ から有限回の変異で得られる．

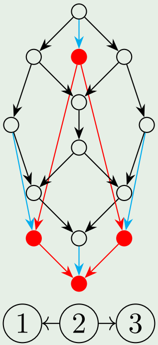
同様の主張が他の有限コクセター型でも成立する [N '26, (2) and (3) Suggested by N.Reading]．

カンブリア束同士の間の変異



$\xmapsto{\eta(2,3)\ \text{で変異}}$

$\xmapsto{②\text{で変異}}$



変異の商 [N '26]

$L \xmapsto{\mu(A,B)} L'$ を束の変異，$f : L \to M$ を全射な束準同型写像であって $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ を満たすとする．以下が成立：

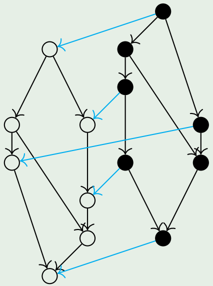
1. フリップ $M \xmapsto{\mu(f(A),f(B))} M'$ は変異．
2. $f(\partial A) = \partial(f(A))$

上の命題で，M' は L' の商束とは限らない (ラベルを無視しても同様)． 特に，$f : (L, \leq_{L'}) \to (M, \leq_{M'})$ は L' から M' への束準同型写像とは限らない．

定義 [N '26]：オルドビス束 (Ordovician lattices) 正確な定義は Definition 8.15 を参照

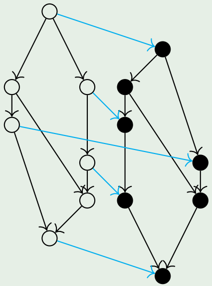
束 L がオルドビス束とは，カンブリア束から有限回の変異で得られる束と同型であること．

例：カンブリア束でないオルドビス束



Camb(① ← ② ← ③)

$\xmapsto{\eta(2,3)\text{ で変異}}$



カンブリア束ではない

予想 [N '26]

1. カンブリア束は変異可能束である．
2. $a_1, a_2 \in L$ をオルドビス束の原子元とする．このとき区間 $[0, a_1 \vee a_2]$ はポリゴン束である．
3. $L' = \mu_{a_i}(L)$ をオルドビス束間の変異，Q, Q' をそれぞれ L, L' と対応する箙とする．このとき $Q' \cong \mu_i(Q)$ である．

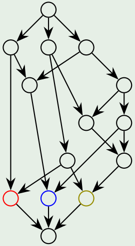
ここで，(3) における箙とオルドビス束との対応は次のスライドで示す．

定理 [N '26]

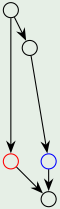
L はオルドビス束であり，カンブリア束から 1 回以内の変異で得られるとする．このとき (2) が成立．また，L, L' の少なくとも片方がカンブリア束のとき，(3) が成立．同様の主張が B 型でも成立．

Camb(Q) から Q を復元する [Reading '06]

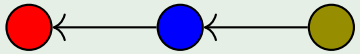
Q' を箙とし，その頂点は Camb(Q) の原子元でラベリングされたものとする．以下の通り Q の辺を定める：区間 $[0, a_1 \vee a_2]$ が N_5 と同型で，長い方の鎖が a_1 を含むとき，辺 $a_1 \to a_2$ を引く．このとき $Q' \cong Q$．



Camb(① ← ② ← ③)

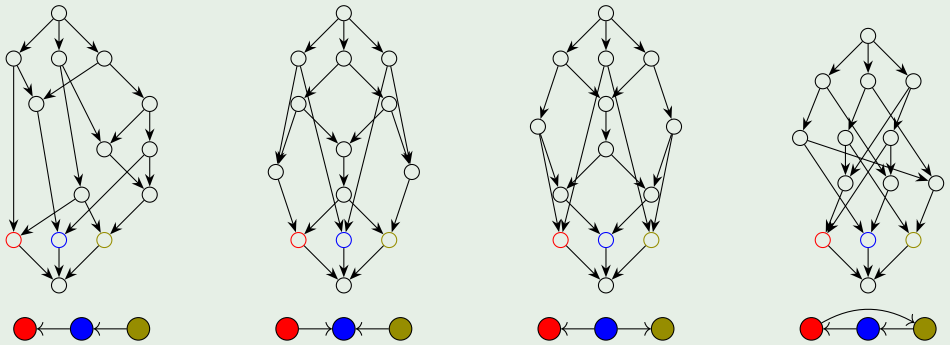


$[0,\ \eta(1,2) \vee \eta(2,3)]\ (\cong N_5)$



復元された箙

オルドビス束と対応する箙



今後の研究

定理 [N '26]

オルドビス束は，一般に，有限型コクセター群の右弱順序の商束として表せない．

予想 [N '26]: Lattices of torsion classes

(Q,W) をポテンシャル付箙，$i \in Q$ とする．$\dim(\mathcal{P}(Q,W)) < \infty$ を仮定する．このとき $\mathsf{Tors}(\mathcal{P}(\mu_i(Q,W)))$ は $\mathsf{Tors}(\mathcal{P}(Q,W))$ から 1 回の変異で得られる束と同型．

変異可能束の特徴付け

束が変異可能束となる必要十分条件は何か？

補遺：無限版のカンブリア束

無限型コクセター群の右弱順序は，一般に束とはならない．従って，有限型のときと同様にここから商束としてカンブリア束を得るというアプローチは取れない．

アフィンタマリ束 [Barkley–Defant '25]

[Dyer '19] は無限型コクセター群の右弱順序を拡張する順序構造として，Dyer 順序を導入した．[Barkley–Speyer '25] により，アフィン型 Dyer 順序が束であると示された．
[Barkley–Defant '25] はアフィン型 Dyer 順序の商束としてアフィンタマリ束を導入した．

オルドビス束との繋がり [N '26]

$\tilde{A}_2$ 型アフィンタマリ束は A_3 タマリ束から 1 回の変異で得られるオルドビス束である．